

差分法による数値解析を用いたコンクリート部材の塩分浸透解析

Salinity infiltration analysis of concrete material that uses numerical analysis by difference method

(株)リテック 正員 朝倉 啓仁 (Keiji ASAKURA)
 (独)北海道開発土木研究所 正員 田口 史雄 (Fumio TAGUCHI)

1. はじめに

北海道内のコンクリート構造物は、海岸部では冬季の季節風による波しぶきや飛来塩分を受け、また道路施設では融雪剤散布により塩分の供給を受ける厳しい塩害環境下に置かれている。

既設構造物の塩害に対する健全度の評価や補修対策の立案において、塩分浸透予測に必要となる定数(表面塩化物イオン含有量 C_0 と見掛けの拡散係数 D)を用いコンクリート部材の塩分浸透解析を行い、鋼材位置の塩化物イオン含有量の現状と将来予測を計算することがある。この時、一般にはコンクリート中への塩化物イオンの浸透はフィックの拡散方程式に従うものと仮定している。そして、 C_0 、 D が一定でかつ半無限体への塩分浸透の条件、すなわち一つの初期値、境界条件の下で定まる理論解を用いて塩分浸透解析が行われている。

しかし、塩分浸透解析を行う対象物は種々の初期値、境界条件の下に置かれており、フィックの拡散方程式の理論解が適用できない場合がある。例えば、部材厚が薄く半無限体と見なせない有限体部材の場合、背面側からも塩分の供給を受ける場合、補修に際しては供用途中で表面被覆を施す場合や断面修復により塩分の浸透した一定厚さを除去する場合などである。このような場合の塩分浸透解析として差分法を用いた数値解析が有効である。

本稿ではフィックの拡散方程式とその解法を解説すると共に、特に実務者の参考となるよう差分法による数値解析を行う場合の初期値、境界条件の設定方法を示す。また、汎用の表計算ソフトを用いて数値計算した結果を紹介しその簡便性、有効性を示している。

2. フィックの拡散方程式を解く方法

2.1 フィックの拡散方程式

フィックの拡散方程式¹⁾は以下の通りであり、1次元の熱伝導方程式として表される。

$$c / t = D \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \dots \dots \dots \text{式(1)}$$

ここに、

- c : 全塩化物イオン含有量 (Cl⁻kg/m³)
- t : 経過時間 (年)
- D : 見掛けの拡散係数 (cm²/年)

2.2 フィックの拡散方程式の一つの理論解

フィックの拡散方程式は初期値、境界条件により種々の理論解が与えられている²⁾が、その代表として広く用いられているものが式(2)³⁾の通称「フィックの拡散方程式の解」である。

$$c/C_0 = 1 - \text{erf} [x / (2 \sqrt{D \cdot t})] \dots \text{式(2)}$$

ここに、

$$C_0 : \text{表面塩化物イオン含有量 (Cl}^- \text{kg/m}^3 \text{)} \\
\text{erf}(s) : \text{誤差関数}^3) \text{)}^4) \\
= 2 / \int_0^s e^{-t^2} dt \\
1 - 1 / (1 + 0.278393s + 0.230389s^2 + 0.000972s^3 + 0.078108s^4)^4$$

式(2)はある一つの初期値・境界条件の下での理論解であり、すなわち見掛けの拡散係数 (D) が時間および位置に対して一定で、かつ表面塩化物イオン含有量(C_0) が時間に対して一定、さらに拡散の媒体であるコンクリートが半無限体である場合の理論解である。

2.3 フィックの拡散方程式の差分法による数値解析

フィックの拡散方程式の理論解は初期値、境界条件に依じて複雑となり理論解の計算も難しくなる。このため供用後の表面被覆、半無限体とならない薄い部材厚、断面修復などの補修などの条件で解析する場合には、フィックの拡散方程式を差分法を用い数値解析する方法が有効である。

式(1)のフィックの拡散方程式に対する近似式としての差分方程式は図-1の要素分割を仮定すると、式(3)となる。⁵⁾

$$(c_{m,n+1} - c_{m,n}) / t \\
= D \times [(c_{m+1,n} - c_{m,n}) / x^2 - (c_{m,n} - c_{m-1,n}) / x^2] \\
= D \times (c_{m+1,n} - 2c_{m,n} + c_{m-1,n}) / x^2 \dots \dots \dots \text{式(3)}$$

ここに、

浸透深さ x 、時間 t をきざみ幅を Δx 、 Δt を用いて、 $x_m = m \Delta x$ 、 $t_n = n \Delta t$ ($m=0,1,2, \dots$ 、 $n=0,1,2, \dots$) とし、任意の要素を $c(x_m, t_n)$ $c_{m,n}$ で表す。

式(3)を整理すると式(4)となる。⁶⁾

$$c_{m,n+1} = D \cdot r (c_{m+1,n} + c_{m-1,n}) + (1 - 2D \cdot r) c_{m,n} \dots \text{式(4)}$$

尚、表面および有限長の背面の境界要素は浸透元あるいは浸透先が存在しないため、式(5)、(6)となる。

$$c_{0,n+1} = D \cdot r (c_{1,n}) + (1 - D \cdot r) c_{0,n} \dots \dots \dots \text{式(5)}$$

$$c_{m_{\text{max}},n+1} = D \cdot r (c_{m_{\text{max}}-1,n}) + (1 - D \cdot r) c_{m_{\text{max}},n} \dots \text{式(6)}$$

ここに、

$$r = \Delta t / \Delta x^2 \dots \dots \dots \text{式(7)}$$

式(7)の r 値の大小は式(3)で示される数列の数値解析を支配しており、 $r < 1/2$ のとき収束し、 $r > 1/2$ のとき発散し解は求まらない。

2.4 差分法による数値解析の初期値と境界条件

(1) 要素分割

要素分割は図-1の通り、コンクリート表面より x に分割した位置を中央値とする要素 $c_{m,n}$ とする。

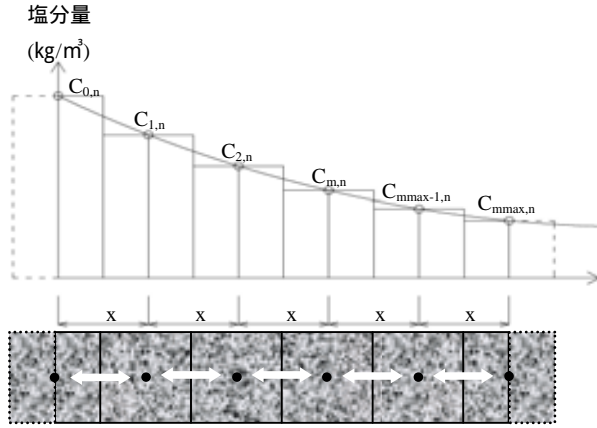


図-1 1次元差分法の要素分割

数値計算においては、式(7)の r 値を $1/2$ 以下の大きい値に設定すると配列を縮小でき、計算プログラムの容量を小さくできる。例えば、解が収束する限界の x と t との組み合わせは表-1の通りである。

表-1 差分計算の距離と時間分割の目安

$x(\text{cm})$	$t(\text{年})$	$r = t/x^2$	100年の計算に必要な行数
1.0	0.500	$r=1/2$ $1/2$	200行
0.5	0.125		800行
0.2	0.020		5,000行
0.1	0.005		20,000行

(2) 境界要素の分割幅

コンクリート表面および最深部の境界要素は要素幅が $x/2$ であるが、中央値を表面位置に合わせるため便宜的に図-1の破線を考慮した要素幅 x の中央値を $c_{0,n}$, $c_{mmax,n}$ と仮定している。尚、この仮定において 3.1 に示す通り、理論解に対して十分な精度を確認している。

(3) 表面要素の境界条件

表面要素は外部から一定の塩分の供給がある場合には $c_{0,n+1} = C_0 (= \text{一定値})$ とする。

表面要素に塩分の供給がない場合、式(5)の通り内在する塩分の拡散のみを考慮する。

$$c_{0,n+1} = D \cdot r (c_{1,n}) + (1 - D \cdot r) c_{0,n}$$

(4) 最深部の境界条件

半無限体では数値計算が出来ないため、深部方向に無限に浸透する場合は、数値計算上有限体部材を仮定し、最深部要素の直前の要素の変化比率に応じて最深部要素 $c_{mmax,n}$ が変化するものとする。

$$c_{mmax,n+1} = c_{mmax-1,n+1} / c_{mmax-2,n+1} \times c_{mmax-1,n+1}$$

最深部が有限体部材の裏面でありかつ塩分の供給がない場合は、式(6)の通り表面側から浸透した塩分の蓄積を考慮する。

$$c_{mmax,n+1} = D \cdot r (c_{mmax-1,n}) + (1 - D \cdot r) c_{mmax,n}$$

また、裏面に一定の塩分供給がある場合には

$$c_{mmax,n+1} = C_1 (= \text{一定値})$$

とする。

3. 差分法による数値解析を用いた塩分浸透解析

3.1 フィックの拡散方程式の理論解との比較

フィックの拡散方程式の理論解である式(2)が成立する境界条件の下で、近似式である式(4)~(7)の差分方程式を数値解析しその精度を比較する。

表-2 に示す解析条件の下、5,10,15,20 年目の塩分浸透曲線を図-2 に示すが、フィックの拡散方程式の理論解に差分法による数値解析結果を重ねて表示しており、良く一致していることが分かる。

表-2 半無限体部材の解析条件 (図-2)

入力条件		入力値
共通	計算年数	20年
	拡散係数	0.50cm ² /年
	表面塩分	10.00kg/m ³
	初期塩分	0.30kg/m ³
差分条件	最大深度	15cm
	x	0.30cm
	t	0.04年
	$r = t/x^2$	0.444
	裏面境界	半無限体
背面塩分量	---	

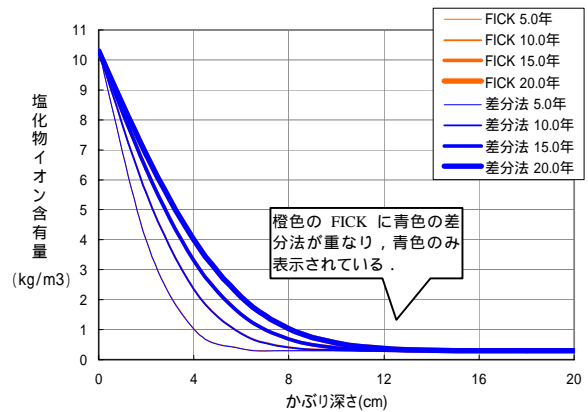


図-2 フィックの拡散方程式の理論解と差分法による数値解析との比較

尚、式(2)の理論解の計算にあたり誤差関数 $\text{erf}(s)$ が必要となるが、市販の表計算ソフト、例えば EXCEL2000 ではエンジニアリング関数として用意されている。

3.2 有限体部材の塩分浸透例

床版や面壁などの比較的薄い部材では背面側で塩分が蓄積すると想定される。表-3 に示す解析条件の下 10,20,30,40 年目の塩分浸透曲線を図-3 に示す。図中に

は半無限体の条件であるフィックの拡散方程式の理論解（式(2)）も合わせて示したが、背面の境界条件の影響により塩分量が理論解に比べ高くなる事が分かる。

表-3 有限体部材の解析条件（図-3）

入力条件		入力値
共通	計算年数	40年
	拡散係数	1.00cm ² /年
	表面塩分量	10.00kg/m ³
	初期塩分量	0.00kg/m ³
差分条件	最大深度	20cm
	x	0.40cm
	t	0.08年
	$r = t / x^2$	0.500
	裏面境界	有限体
	背面塩分量	0.00kg/m ³

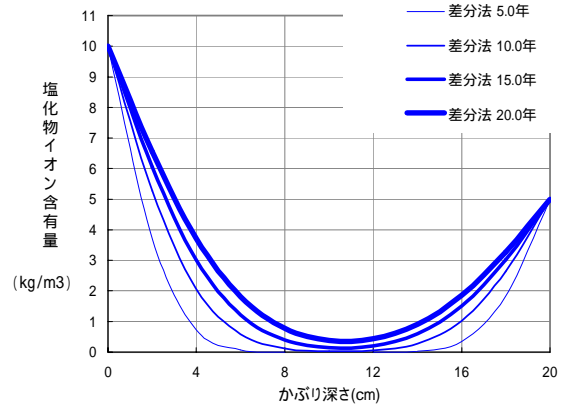


図-4 表面および背面の両面からの塩分浸透

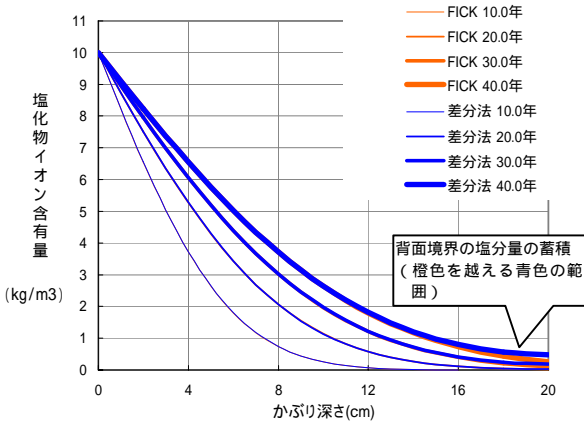


図-3 有限体背面での塩分量の蓄積

3.3 表面および背面からの塩分供給がある場合の塩分浸透例

床版や面壁などの比較的薄い部材では表面および背面の両面から塩分の浸透することが考えられる。表-4 に示す解析条件の下 5,10,15,20 年目の塩分浸透曲線を図-4 に示す。部材中央付近の塩分量が表面および背面から浸透する塩分量により蓄積されていく様子が分かる。

表-4 有限体部材の解析条件（図-4）

入力条件		入力値
共通	計算年数	20年
	拡散係数	0.50cm ² /年
	表面塩分量	10.00kg/m ³
	初期塩分量	0.00kg/m ³
差分条件	最大深度	20cm
	x	0.40cm
	t	0.08年
	$r = t / x^2$	0.500
	裏面境界	有限体
	背面塩分量	5.00kg/m ³

3.4 表面からの塩分供給をある一定期間後に遮断する場合の塩分浸透例

塩化物イオンが既に一定量浸透しており、塩害補修対策として表面被覆を行う場合は、表面からの飛来塩分の供給はないかあるいはごく小さいと考えられる。しかし、既に内部に浸透した塩分量がより内部に浸透するため補修効果が期待できない場合がある。

ここでは、フィックの拡散方程式の理論解（式(2)）に従い一定期間浸透した塩分量に対し、表面被覆を施す場合を想定し、表-5 に示す解析条件を仮定した。すなわち、図-5 に示す黄緑線は理論解に従い建設後 20 年浸透した塩分量であり、20 年目に表面被覆を施し（補修後経年 0 年）、補修後 40 年まで計算した。

表-5 表面塩分量の供給を遮断する解析条件（図-5）

入力条件		入力値
補修以前 (FICK)	補修時経過年数	20年
	コンクリート拡散係数	0.50cm ² /年
	表面塩分量	10.00kg/m ³
	初期塩分量	0.00kg/m ³
補修後 (差分法)	最大深度	20cm
	補修後計算年数	40年
	x	0.40cm
	t	0.08年
	$r = t / x^2$	0.500
	裏面境界	半無限
背面塩分量	---	
補修後の表面塩分量		0.00kg/cm ³ (遮塩塗装)

表面被覆による補修後 10,20,30,40 年の塩分分布を図 5 の青線に示すが、この青線に対応するように表面被覆を実施しない場合を橙線で建設後 30,40,50,60 年の塩分分布として同時に示した。表面被覆を実施した場合は表面側の塩分量の低下に応じて内部に塩分が浸透し、表面被覆を実施しない場合と同程度の塩分量となる領域がある事が分かる。

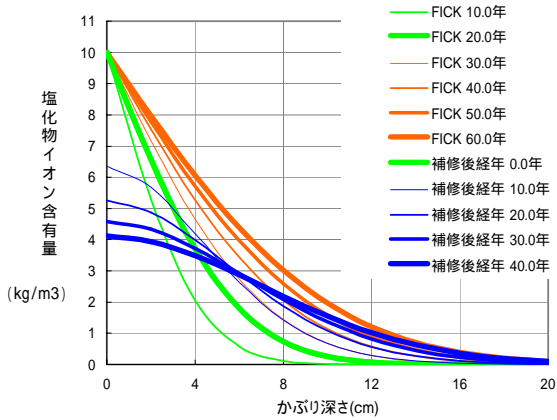


図-5 遮塩塗装による補修後の塩分浸透

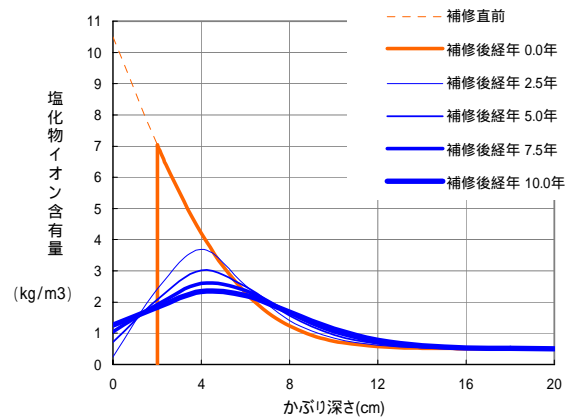


図-6 断面修復後の塩分浸透

3.4 任意の塩分量分布を始点とする塩分浸透例

塩化物イオンが既に一定量以上浸透しており、断面修復や脱塩工法などの除塩処置を行う場合は、塩分量分布は任意の形状となる。

ここでは、フィックの拡散方程式の解(式(2))に従い浸透した塩分量の表面部分をはつり除去し、断面修復材により修復した後、表面被覆を施す場合を想定し、表-5 に示す解析条件を仮定した。すなわち、図-6 に示す橙破線はフィックの拡散方程式の解(式(2))に従い 20 年浸透した塩分量であり、断面修復により表面から 2cm を補修した直後を橙実線で示し、この内在する塩分量を始点とした。また、表面被覆により補修後は表面からの塩分供給がないものと仮定して補修後 10 年までの塩分浸透を計算した。

表-6 任意の塩分量形状の解析条件(図-6)

入力条件		入力値
補修以前 (FICK)	補修時経過年数	20年
	コンクリート拡散係数	0.50cm ² /年
	表面塩分量	10.00kg/m ³
	初期塩分量	0.50kg/m ³
補修後 (差分法)	最大深度	20cm
	補修後計算年数	10年
	x	0.40cm
	t	0.08年
	$r = t / x^2$	0.500
	裏面境界	半無限
	背面塩分量	---
	断面修復厚	2cm
	断面修復材の拡散係数	0.20cm ² /年
	補修後の表面塩分量 (遮塩塗装)	0.00kg/cm ³

計算結果を図6の青線で示すが、補修後の塩分浸透は断面修復材の拡散係数を母材コンクリートより計算上小さく設定しているにも係わらず、表面側のはつり除去部と未はつり部との濃度差が大きく断面修復した表面側により多く塩分が浸透していく様子が分かる。

4. おわりに

フィックの拡散方程式の理論解が適用できない初期値、境界条件に対して、差分法による数値解析を用いた塩分浸透解析を試みた。この結果、本手法は適切な初期値、境界条件を設定することにより、有限長部材や補修対策など種々の条件下の塩分浸透を解析的に予測できることが確認できた。今後は、様々な条件下におかれた実構造物の塩分量試験結果との整合性を照査し、適用範囲の確認および予測精度の向上を計っていく予定である。

参考文献

- 1) 土木学会：2001年制定コンクリート標準示方書 [維持管理編]，p101，2001.1
- 2) 土木学会：コンクリート技術シリーズ 40，鉄筋腐食・防食および補修に関する研究の現状と今後の動向(その2) コンクリート委員会腐食防食小委員会(2期目)報告，p158-159
- 3) 土木学会：2002年制定コンクリート標準示方書 [施工編]，p25，2002.3
- 4) 国土交通省土木研究所材料施工部コンクリート研究室，構造橋梁部橋梁研究室，(社)プレストレスト・コンクリート建設業境界：ミニマムメンテナンス PC 橋の開発に関する共同研究報告書()，p45，2001.3
- 5) 守分敦郎，長滝重義，大即信明，三浦成夫：既設コンクリート構造物の塩化物イオンの拡散過程により評価される表面処理工法の適用性，土木学会論文集，No.520/ -28，1995.8
- 6) 例えば，安部斎：応用微分方程式，p247，森北出版(株)